

**Ruolo giocato dai Poli di Regge  
nell'evoluzione della Fisica delle Particelle**

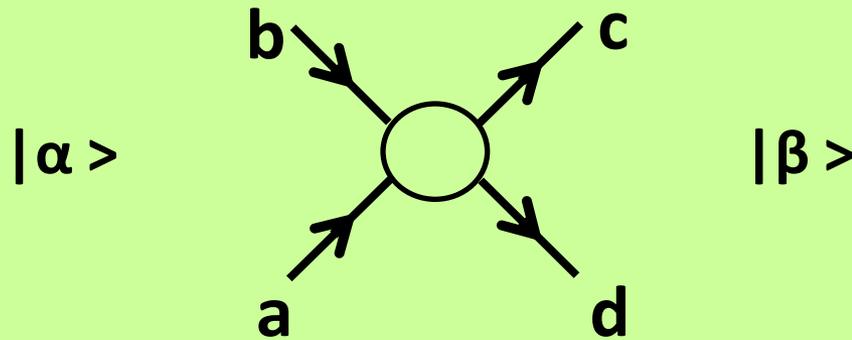
**Seminari di Fisica  
Dipartimento di Fisica  
Università di Torino  
5 dicembre 2017**

**Alessandro Bottino  
Università di Torino  
Accademia delle Scienze di Torino**

I **Poli di Regge** hanno origine nel metodo introdotto da Tullio Regge per studiare le proprietà fondamentali delle ampiezze di transizione in processi d'urto tra particelle elementari

Cerchiamo di chiarire come questa importante linea di ricerca si inquadri nella **fisica delle particelle tra la fine degli Anni '50 e l'inizio degli Anni '60**

Per studiare le proprietà delle particelle e delle loro interazioni è importante studiare processi di collisione tra particelle, per esempio



Il processo viene descritto dalla funzione complessa  $S(\alpha,\beta)$   
probabilità di transizione  $P(\alpha,\beta) \equiv |S(\alpha,\beta)|^2$

Matrice  $S \equiv$  matrice avente come elementi  $S(\alpha,\beta)$  con **proprietà di unitarietà**

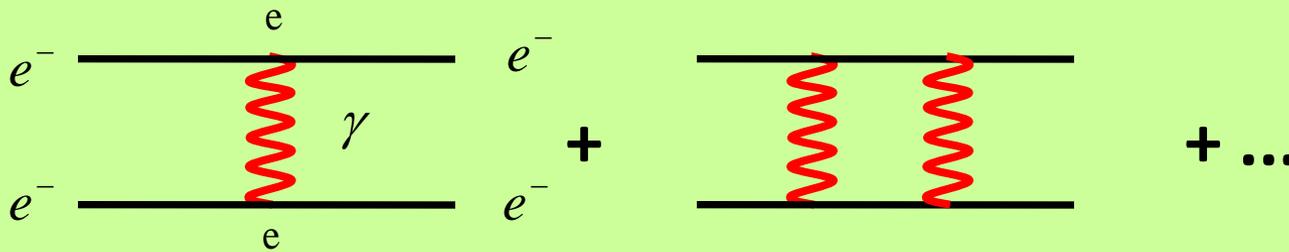
$$\sum_{\beta} P(\alpha, \beta) \equiv \sum_{\beta} |S(\alpha, \beta)|^2 = 1.$$

$$\sum_{\gamma} S(\alpha, \gamma) S^*(\beta, \gamma) = 0 \quad (\text{if } \alpha \neq \beta)$$

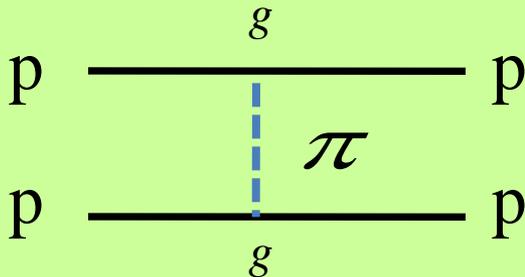
Nel caso di processi elettromagnetici (Elettrodinamica Quantistica)  $S(\alpha, \beta)$  può essere sviluppata perturbativamente:

$$S(\alpha, \beta) = \sum_n \left( \frac{e^2}{2hc} \right)^n S_n$$

$$\frac{e^2}{2hc} \cong 1/137$$



Nei processi di interazione forte il meccanismo alla Yukawa non consente uno sviluppo perturbativo

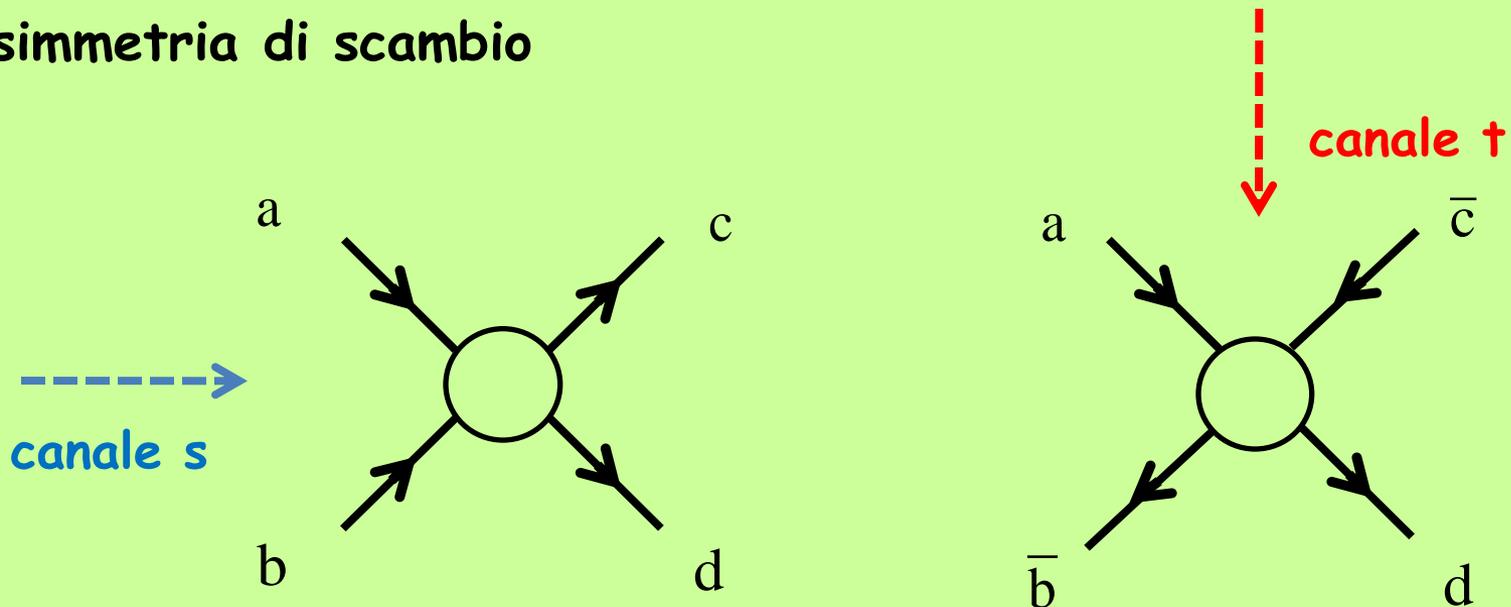


$$\frac{g^2}{2hc} \cong 15$$

# Teoria della matrice $S$

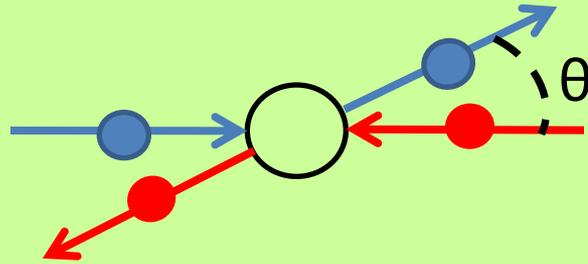
La **funzione**  $S(\alpha, \beta)$  associata al processo viene studiata mediante le seguenti proprietà:

- unitarietà
- analiticità (da **principio di causalità**)
- simmetria di scambio



**variabili:**  $s = (p_a + p_b)^2$ ,  $t = (p_a - p_c)^2$

## Urto elastico nel sistema del baricentro



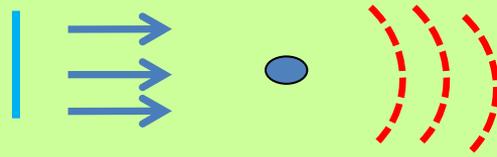
$$s = E = k^2, \quad t = 2E (\cos \vartheta - 1)$$

$E$  = energia totale,  $k$  = numero d'onda,  $\theta$  = angolo di diffusione

passando dal canale  $s$  al canale  $t$  i ruoli delle variabili  $s, t$  si scambiano

nel sistema del baricentro il problema a due corpi si riconduce a quello di una particella, di massa ridotta, diffusa da un centro diffusore

# Diffusione di una particella da un potenziale



$$\psi \approx e^{i\omega(z/c-t)} + f(\omega, \cos\theta) e^{i\omega(r/c-t)} / r$$

ampiezza  
d'urto



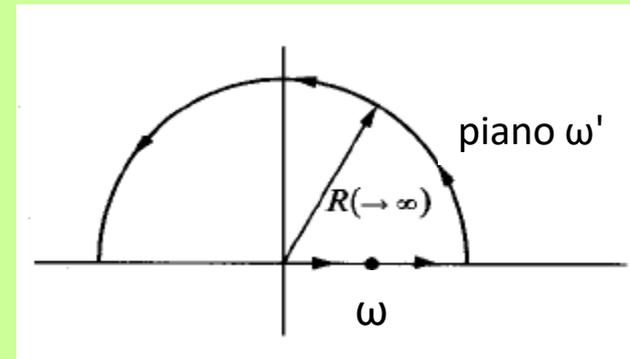
il principio di causalità applicato al processo d'urto implica che  $f(\omega) = f(\omega, \cos\theta=1)$  sia analitica nel semi-piano superiore dell'energia  $\omega$  quindi

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega}$$

se  $f(\omega) \rightarrow 0$  più  
rapidamente  
di  $1/\omega$  per  $\omega \rightarrow \infty$

$$\text{Re } f(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\text{Im } f(\omega')}{\omega' - \omega}$$

relazione di  
dispersione



In alcune applicazioni la funzione  $f(\omega)$  non ha il comportamento asintotico previsto precedentemente, in questo caso si può comunque ricavare una relazione di dispersione applicando la procedura precedente alla **funzione  $f(\omega)$  divisa per una conveniente potenza di  $\omega$** . Per esempio nel caso della funzione  $f(\omega)/\omega$  si ottiene

$$\operatorname{Re} f(\omega) = \frac{2\omega^2}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Im} f(\omega')}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)}.$$

Glorioso antecedente storico: le relazioni di dispersione ottenute indipendentemente da **Kramers e Kronig negli anni 1926-1927 per l'indice di diffrazione**

Ruolo importante delle relazioni di dispersione, se si tiene conto che **Im  $f(\omega)$  è collegata alla sezione d'urto totale** mediante il **teorema ottico**, ottenibile dalle condizioni di unitarietà

$$\text{Im } f(\omega) = \frac{\omega}{4\pi c} \sigma_{tot}(\omega)$$



$$\text{Re } f(\omega) = \frac{2\omega^2}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\text{Im } f(\omega')}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)}$$



$$\text{Re } f(\omega) = \frac{\omega^2}{2\pi^2 c} P \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\sigma_{tot}(\omega')}{(\omega'^2 - \omega^2)}$$

La funzione complessa  $f(\omega)$  può essere **completamente ricostruita** a partire dalla sezione d'urto misurata.

Alla fine degli anni '50 **Stanley Mandelstam** ipotizzò che in teoria relativistica l'ampiezza d'urto del processo  $a + b \rightarrow c + d$  fosse analitica **nella coppia di variabili  $s, t$**  (relazione di dispersione doppia)

Tullio Regge verificò l'esattezza di questa ipotesi in un contesto di teoria di potenziale, con una linea di ricerca avviata al Max Planck Institut für Physik di Monaco di Baviera nel 1959 e proseguita all'Istituto di Fisica dell'Università di Torino nel 1960-61:

T. Regge: Introduction to Complex Orbital Momentum, *Il Nuovo Cimento* 14 (1959)

A. Bottino, A. M. Longoni and T. Regge, Potential Scattering for Complex Energy and Angular Momentum, *Il Nuovo Cimento* 23 (1962)

Una divagazione sulla trasformazione di  
**Watson-Sommerfeld**

**Trasformata di Watson-Sommerfeld** utilizzata storicamente per valutare la **trasmissione lungo la superficie terrestre** di un'onda emessa da un oscillatore Hertziano di data frequenza

H. Poincaré, Rend. Circolo Mat. di Palermo, 29 (1910) 169

J. W. Nicholson, Phil. Mag. 20 (1910) 157

G. N. Watson, Proc. Roy. Soc. London, 95, issue 666 (1918)

*A. Sommerfeld: Partial Differential Equations in Physics, Academic Press Inc., New York (1949)*

# Partial Differential Equations in Physics



BY ARNOLD SOMMERFELD

*University of Munich, Germany*

In un problema di trasmissione di onde lungo la superficie terrestre Sommerfeld si trova a dover valutare numericamente la seguente serie

$$u = \frac{k}{4\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \vartheta) \frac{\zeta_n(kr)}{\xi_n(ka)},$$

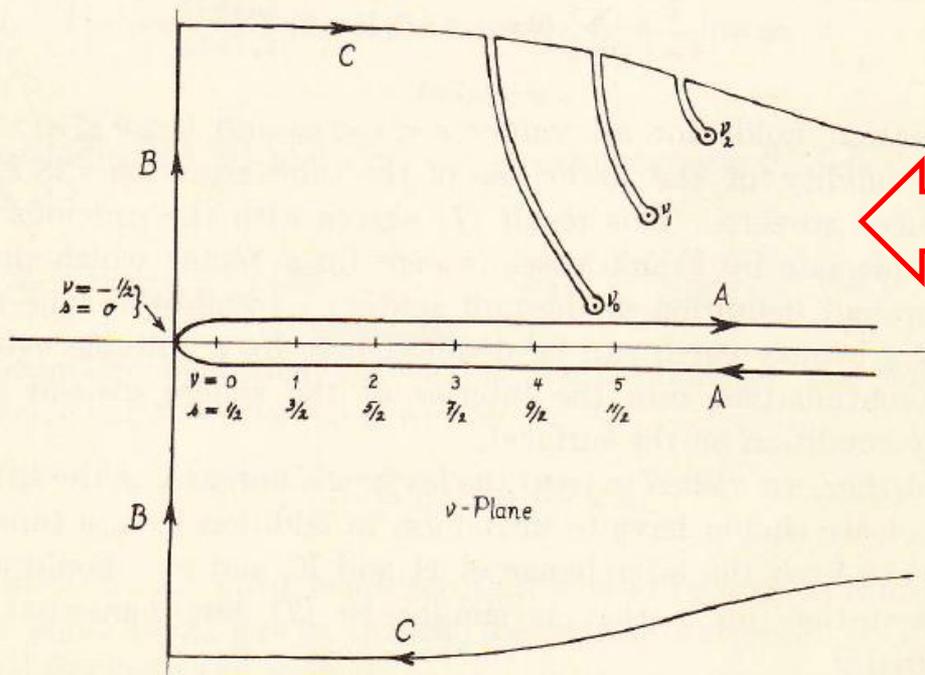
of  $n$ . We should have to use more than 1000 terms of the series until the Debye asymptotic approximations (21.32) became valid; and only the latter can bring about a real convergence of the series.

In order to obtain a usable computation of  $u$ , we apply a method which was first applied successfully to our problem by G. N. Watson,<sup>17</sup> and which we shall find to be connected with the method developed in Appendix II to Chapter V. Namely, we transform the sum (7) into a complex integral.

We then replace  $n$  by a complex variable  $\nu$  and we trace a loop  $A$  in the  $\nu$ -plane of Fig. 32 that surrounds all the points

(8a)

$$\nu = 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$



Poli di Sommerfeld

e dopo una derivazione lunga 7 pagine ...

of  $m$ . Thus (24) simplifies to

$$(25) \quad u = \dots (\sin \vartheta)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\nu_m} (4m + 1)^{-\frac{1}{2}} e^{i(\nu_m + \frac{1}{2})\vartheta}.$$

where the terms which are independent of  $m$  and  $\vartheta$  are denoted by . . . .  
In our original series (7), summed over  $n$ , we would have had to consider more than 1000 terms. In our present series, summed over  $m$ , convergence is so rapid, due to the exponential dependence of the terms on  $i\nu_m \vartheta$  and to the increase of  $\nu_m$  indicated in (21), that we may break off at the first or second term. Because of the positive

Dall'autobiografia di Tullio Regge, *L'infinito cercare* (con Stefano Sandrelli):

“Fin da qualche tempo avevo ripreso alcuni lavori matematici ormai classici di **Henri Poincaré e Arnold Sommerfeld**, che mi condussero a ...”.

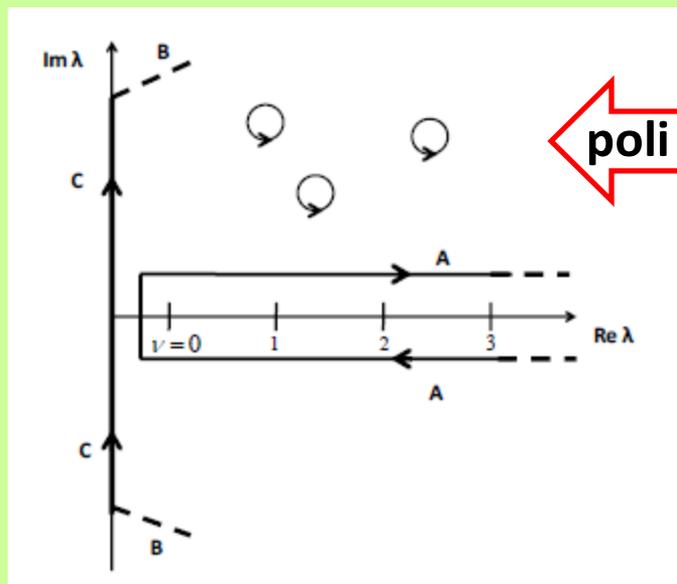
# Metodo di Regge per studiare proprietà di analiticità della ampiezza d'urto elastica

Lo sviluppo in onde parziali

$$f(k, \cos \vartheta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [\exp[2i\delta(l, k)] - 1] P_l(\cos \vartheta)$$

viene riscritto secondo la **trasformata di Sommerfeld-Watson**,  
ossia la variabile intera  $l$  diventa variabile complessa  $\nu$  e la  
somma su  $l$  diventa un integrale sul cammino  $A$

$$f(k, \cos \vartheta) = \frac{1}{4k} \int_A d\nu \frac{2\nu+1}{\sin(\pi\nu)} [\exp[2i\delta(\nu, k)] - 1] P_\nu(-\cos \theta)$$



poli di Regge

$$\lambda = \nu + 1/2$$

## Equazione radiale di Schrödinger

$$\psi''(r) + k^2\psi(r) - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{r^2}\psi(r) - V(r)\psi(r) = 0$$

$\varphi(\lambda, k, r)$  soluzione che nell'origine si comporta come  $\varphi(\lambda, k, r) \approx r^{\lambda + \frac{1}{2}}$

$f(\lambda, k, r)$  soluzione che all'infinito si comporta come  $f(\lambda, k, r) \approx \exp[-ikr]$

loro **Wronskiano**  $f(\lambda, k) \equiv W[f(\lambda, k, r), \varphi(\lambda, k, r)]$

$$S(\lambda, k) \equiv \exp[2i\delta(\lambda, k)] = \frac{f(\lambda, k)}{f(\lambda, -k)} \exp\left[i\pi\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\right]$$

Quindi l'integrale sul cammino A viene trasformato in integrali sui cammini B, C più residui nelle singolarità polari, tenuto conto delle proprietà analitiche della funzione integranda.

Da uno studio dettagliato della funzione  $\exp[2i\delta(\lambda, k)]$  segue che il precedente integrale sul cammino A può essere riscritto come

$$f(k, \cos \theta) = \frac{1}{2k} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda \frac{\exp[2i\delta(\lambda, k) - 1]}{\cos(\pi\lambda)} P_{\lambda - \frac{1}{2}}(-\cos \theta) + \frac{i\pi}{2k} \sum_{n=1}^N S_n P_{l_n}(-\cos \theta) \frac{2l_n}{\sin(\pi l_n)}$$

e che quindi  $f(k, \cos \theta)$  è analitica nel piano di  $\cos \theta$  con la sola eccezione del taglio  $\cos \theta$  reale  $> 1$  e funzione meromorfa nel semi-piano  $\text{Im } k > 0$ .

I poli di  $\exp[2i\delta(\lambda, k)]$  sono localizzati nel quadrante  $\text{Re } \lambda > 0, \text{Im } \lambda > 0$

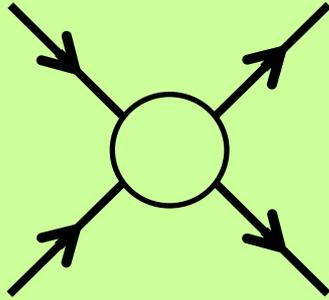
Per grandi valori di  $t$  (ossia di  $\cos \theta$ ):

★ l'integrale sull'asse immaginario di  $\lambda \rightarrow 0$

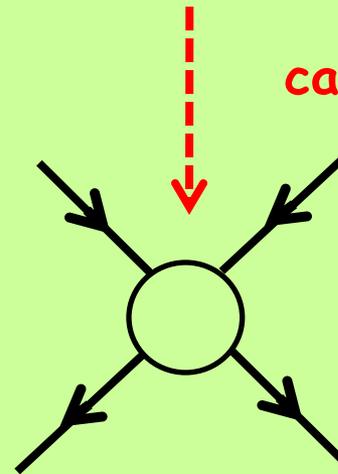
★  $P_{\lambda - \frac{1}{2}}(-\cos \theta) \approx (\cos \theta)^{\lambda - \frac{1}{2}}$

e quindi  $f(s, t) \approx C(s) t^{\alpha(s)}$  dove  $\alpha(s)$  è  $l'_n(s)$  con parte reale massima

canale s



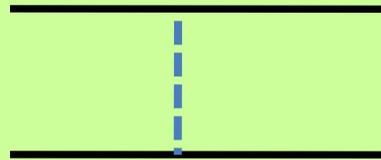
canale t



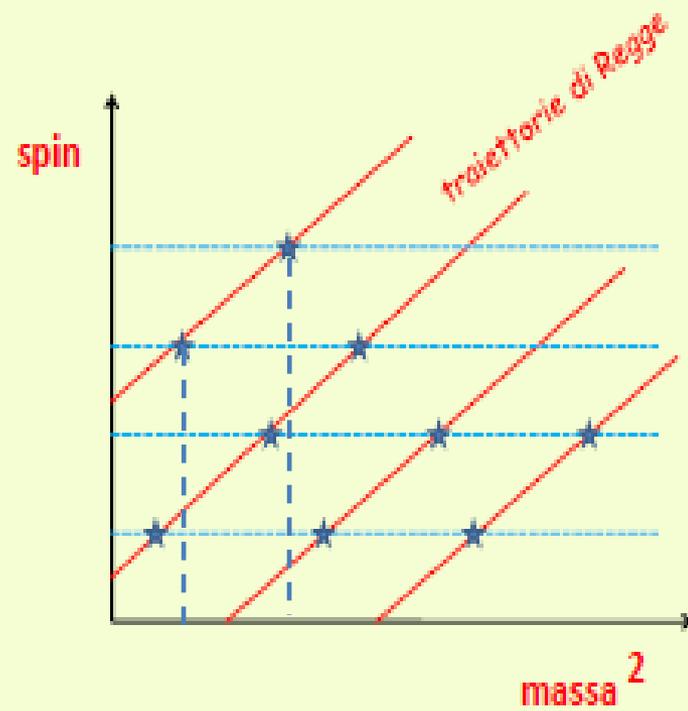
Per proprietà di dualità ( $s \leftrightarrow t$ ) un polo nel canale t genera il comportamento asintotico

$$f(s, t) \approx C(t) s^{\alpha(t)} \text{ per } s \rightarrow \infty$$

I poli di Regge generalizzano il modello di Yukawa



## Diagramma di Chew-Frautschi



## Conclusioni

L'approccio di Regge allo studio della diffusione elastica di particelle mediante momento angolare complesso (poli di Regge) condusse a stabilire proprietà cruciali dell'ampiezza di diffusione: ossia **le sue proprietà analitiche (in 2 variabili complesse) e i suoi comportamenti asintotici.**

L'analisi di Regge, condotta in teoria non-relativistica, fu fonte di ispirazione per **estensioni in teorie relativistiche.**

Inoltre il metodo di Regge ebbe un ruolo determinante nel porre le basi di sviluppi teorici ulteriori: **il modello di Veneziano e i conseguenti modelli duali.**